$\boxed{5}$. (1) $z+1-\dfrac{a}{z}=0$

$z^2+z-a=0$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$

(i) $a\neq 0$のとき.

$z=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$

(ii) $a=0$のとき.

$z=-1\ (\because z\neq 0)$

(2) $\overline{z}+1-\dfrac{a}{z}=0$

$\overline{z}\cdot z+z=a$

$z=x+yi$とすると、$\overline{z}=x-yi$

$x^2+y^2+(x+yi)=a$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-a=0 \cdots(1) \\ y^2=0 \cdots(2) \end{cases}$

(1)より. $(x+\frac{1}{2})^2-a+\frac{1}{4}=0 \Leftrightarrow a=(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$

よってxは実数なので、$a\geqq-\frac{1}{4}$.

(3) $z\cdot(\overline{z})^2+\overline{z}-\dfrac{a}{z}=0$

$(z\cdot\overline{z})^2+z\cdot\overline{z}=a$

(2)と同様にして.

$a=(z\overline{z}+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$

$z\cdot\overline{z}=x^2+y^2\geqq 0$より.

$a\geqq 0$.